1 Principe général

Résoudre une inéquation, c'est déterminer l'ensemble S de tous les réels x vérifiant l'inégalité donnée. L'ensemble des solutions S se présente en général sous la forme d'un intervalle ou d'une union d'intervalles.

Pour déterminer si les bornes de S sont ouvertes ou fermées :
Les bornes sont ouvertes si l'inégalité formant l'inéquation est stricte, si la borne correspond à un infini ou à une valeur interdite. Dans tous les autres cas, les bornes sont fermées.

2 Études de signes de produits et de quotients

2.1 Exemple d'étude de signe d'un produit

On considère le produit

$$(x-3)(1-x)$$

- $x-3=0$ pour $x=3$ et $1-x=0$ pour $x=1$.
- On fait apparaître dans un tableau de signes, les signes de $x-3$ et de $1-x$, puis on utilise la règle des signes.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-3$		-		-	0	+	
$1-x$		+	0	-		-	
$(x-3)(1-x)$		-	0	+	0	-	

$(x-3)(1-x)$ est strictement négatif sur $[-\infty;1[\cup]3;+\infty[$ et positif sur [1;3].

2.2 Exemple d'étude de signe d'un quotient

On considère le quotient

$$\frac{3-2x}{x+1}$$

- On détermine les *valeurs interdites* :
  Ici, on doit avoir $x+1\neq 0$ c'est à dire $x\neq -1$ sous peine d'avoir une division par zéro.
- On procède de même que pour l'étude de signe d'un produit.
  $3-2x=0$ pour $x=\frac{3}{2}$ et $x+1=0$ pour $x=-1$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$3-2x$		+		+	0	-	
$x+1$		-	0	+		+	
$\frac{3-2x}{x+1}$		-	$\Vert$	+	0	-	

Attention : il faut ajouter une **double barre** dans la dernière ligne pour toutes les valeurs de x qui annulent le dénominateur.

3 Résolution d'inéquations

3.1 Exemple de résolution d'inéquation produit

On considère l'inéquation

$$\frac{3x+1}{x-2} \leq 5$$

.

- On détermine la valeur interdite : $x - 2 = 0$ donne $x = 2$.
- On se ramene à 0 en transposant tout dans le premier membre :

$$\frac{3x+1}{x-2} - 5 \leq 0$$

$$\frac{3x+1-5(x-2)}{x-2} \leq 0$$

$$\frac{3x+1-5x+10}{x-2} \leq 0$$

$$\frac{-2x+11}{x-2} \leq 0$$

- On étudie le signe du quotient obtenu :
  $-2x + 11 = 0$ pour $x = \frac{11}{2}$

x	$-\infty$		2		5,5		$+\infty$
$-2x+11$		+		+	0	-	
$x-2$		-	0	+		+	
$\frac{-2x+11}{x-2}$		-	$\|\|$	+	0	-	

- On détermine à partir du tableau les valeurs de x solutions de l'inéquation :

$$S = [-\infty; 2[\cup [5,5; +\infty[$$

3.2 Synthèse sur les inéquations

Démarche de résolution :
Pour résoudre une inéquation donnée, on utilise des développements, des factorisations ou des transpositions d'un membre à l'autre pour se ramener à :

- Une inéquation du premier degré ;
- une inéquation produit nul ;
- ou une inéquation quotient nul.

Exemple :

$$\begin{aligned}
(x+2)^2 &\leq 9 \\
(x+2)^2 - 9 &\leq 0 \\
(x+2)^2 - 3^2 &\leq 0 \\
(x+2-3)(x+2+3) &\leq 0 \text{ d'après l'identité remarquable} \\
& \quad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\
(x-1)(x+5) &\leq 0
\end{aligned}$$

C'est une inéquation produit nul. On étudie donc le signe du produit $(x-1)(x+5)$:
$x - 1 = 0$ pour $x = 1$ et $x + 5 = 0$ pour $x = -5$.
On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$x-1$		-		-	0	+	
$x+5$		-	0	+		+	
$(x-1)(x+5)$		+	0	-	0	+	

L'ensemble des solutions est donc l'ensemble $[-5; 1]$.